



TITLE:

Non-equilibrium Evolution of Long-range Interacting Systems and Polytrope  
(Collective Dynamics in Dynamical Systems :  
Across the border of preserving and  
dissipative systems)

AUTHOR(S):

阪上, 雅昭

---

CITATION:

阪上, 雅昭. Non-equilibrium Evolution of Long-range Interacting Systems and Polytrope (Collective Dynamics in Dynamical Systems : Across the border of preserving and dissipative systems). 数理解析研究所講究録 2013, 1827: 108-116

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194778>

RIGHT:

# Non-equilibrium Evolution of Long-range Interacting Systems and Polytrope

京都大学・人間・環境学研究科\* 阪上 雅昭

Masa-aki Sakagami

Graduate School of Human and Environmental Studies  
Kyoto University

## 1 Introduction

約 100 万個の星が互いの重力で集まっている球状星団のような重力多体系 [1, 2] は、比熱が負になるという特徴があり、そのため熱力学的に不安定で興味深い進化をすることが知られている [3, 4, 5]. 本稿ではまず長距離相互作用系の代表である重力多体系の非平衡進化をについて概説する [6, 7]. ここでは Tsallis により提唱されている非加法的統計熱力学 [8] (Tsallis 統計熱力学) の枠組みが表面上重要な役割を果たす. 引き続き、他の長距離相互作用系の代表例である Hamiltonian Mean Field Model [9, 10] についての最近の研究の結果を報告する.

ここで紹介する重力多体系での研究は 3 つに大別される. まず第 1 は重力熱力学的不安定性 [3, 4] (Gravo-thermal catastrophe) の一般化である [11]. 重力多体系は比熱が負であることが知られている. そのため温度差により中心部から周辺部へ熱が流れると中心部 (コア) が収縮し温度を上昇させ、ますます温度差を増大させることがある. この場合、重力多体系ではコア収縮が起こり、いわゆる温度一定の熱平衡状態に向かって必ずしも緩和しない. これを重力熱力学的不安定性という. 従来、熱力学的不安定性は Boltzmann-Gibbs (B-G) エントロピーを用いて解析されていた. 重力多体系の平衡状態は B-G エントロピーの極大状態として記述される. 本研究ではこれを Tsallis エントロ

ピーを用いた解析に一般化した。その結果、極大状態としてポリトロープ状態が得られた。この状態は指数  $n$  をもち、より広いパラメタ領域で重力多体系の状態を記述することが可能になった。

第2の結果は、ポリトロープ状態が非平衡進化の系列であることを発見したことである。上で求めたポリトロープ状態は Tsallis エントロピーの極大状態であるため定常状態であることが期待される。一方、ポリトロープ状態は等温状態と異なり温度勾配をもつ、すなわち中心部が周辺部より温度が高いことが知られている。従って熱の流れが存在する。恒星の場合は中心部に核融合反応による熱源が存在するためポリトロープ状態は定常状態として存在できる。ところが重力多体系の場合はそのような熱源が中心部に存在しない。そのためポリトロープ状態は進化し、定常状態ではあり得ない。そこでN体数値シミュレーションを行ったところ、重力多体系はポリトロープ状態の系列を指数  $n$  を次第に増加させながら進化することを発見した。さらに、ポリトロープ状態と異なる状態から始めたときまず系はあるポリトロープ状態に近づき、その後はポリトロープの系列を進化するという非常に興味深い結果を得た。

このように重力多体系は2体緩和の時間スケールでポリトロープ状態の系列を進化して行く。本研究ではポリトロープ指数  $n$  の進化を記述する方程式を Fokker-Planck 方程式と一般化された変分原理より導出することに成功した。これが本稿で紹介する重力多体系についての第3の研究結果である。

最後に本稿では、これらの重力多体系で得た知見をふまえて長距離相互作用系のもう一つの代表例である HMF model について議論する。このモデルについては、まだ研究の途中段階であるが、やはりポリトロープが系の非平衡進化を記述することを示す。

## 2 重力多体系の非平衡進化

### 2.1 Tsallis エントロピーによる一般化された重力熱力学的不安定性

重力が進化に重要な役割を果たす自己重力系の中で、重力で互いに相互作用する  $N$  個の質点の集まりを重力多体系とよぶ。約  $10^6$  個の星の集団である球状星団はその代表例である。本研究では重力多体系の熱力学的性質を非加法性統計熱力学の立場から解析することを試みた。

自己重力系は、その比熱が負であるという著しい性質をもっている。実際、球状星団のような重力多体系ではその中心部の比熱が負になることが知られている。このため中心部の温度が高く周辺部の温度が低いという温度勾配が生じると、中心部から周辺部へ熱が流

れることにより, ますます温度勾配が大きくなる不安定性が存在する. この不安定性を重力熱力学的不安定性という. 従来, 重力熱力学的不安定性の研究では加法的な性質をもつ Boltzmann-Gibbs (B-G) エントロピーが用いられてきた [4, 5]. 質量  $M$  エネルギー  $E (< 0)$  の重力多体系を断熱壁の中に閉じこめるとしよう. その平衡状態は  $M, E$  を一定に保ったもとでの B-G エントロピーの極値として与えられる. さらにエントロピーの 2 次変分を調べることで, 重力熱力学的不安定性が生じる状態ではエントロピーが極大でないことが示されていた.

本研究ではこの解析を非加法的 Tsallis エントロピーの場合に拡張した [11]. 一般に加法性を破る Tsallis エントロピー  $S_q$  は状態  $i$  ( $i = 1 \dots N$ ) の実現確率を  $p_i$  としたとき

$$S_q = \frac{1}{1-q} \left( \sum_{i=1}^N p_i^q - 1 \right) \rightarrow - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (q \rightarrow 1) \quad (1)$$

で与えられ, パラメター  $q = 1$  の時に, B-G エントロピーに一致する. これらの論文では  $M, E$  を一定に保ったもとでの Tsallis エントロピーの極値から平衡状態を求めた. その結果, 一粒子エネルギー  $\epsilon$  をもつ粒子の分布関数は

$$f(\epsilon) = A (\epsilon_0 - \epsilon)^{q/(1-q)}, \quad \epsilon = \frac{1}{2}v^2 + \phi(r), \quad (A, \epsilon_0 \text{ は定数}) \quad (2)$$

とべき関数になることが示された. ここで,  $v$  は粒子の速度, また  $\phi(r)$  はこの分布から導かれる密度分布  $\rho(r)$  により決まる重力ポテンシャルである. 当然ではあるが, 分布関数 (2) は  $q \rightarrow 1$  の極限で Boltzmann 分布に一致する.

また分布関数 (2) から得られる圧力  $P$  密度  $\rho$  の間の状態方程式が

$$P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad n = \frac{1}{1-q} + \frac{1}{2} \quad (3)$$

というポリトロプ関係を充たし, 指数  $q$  がポリトロプ指数  $n$  と関連づけられる状態が実現されていた.

さらにエントロピーの 2 次変分を調べることで  $n > 5$  で重力熱的不安定性が現れることを示した. 指数  $n \rightarrow \infty$  の極限として, B-G エントロピーの極値である等温状態を含んでいることは, 非加法性エントロピーを用いることでより広いクラスの状態を取り扱えるようになったことを意味している (図 1). さらに, 求

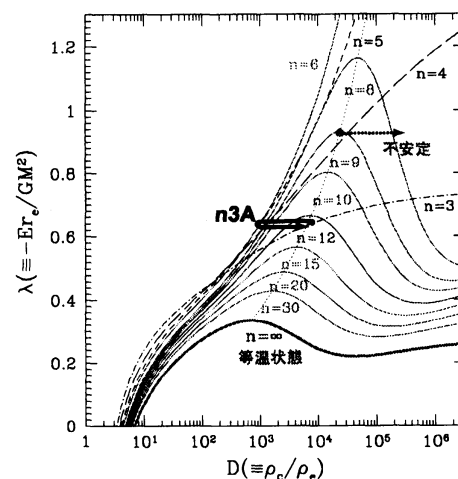


図 1

めた平衡状態のまわりでの2次変分を具体的に評価し不安定性が生じる場合にはエントロピーが極大になっていないことを示した。

以後、Tsallis エントロピーの極値で与えられる分布関数 (2) の表す状態をポリトロープ状態と呼ぶことにする。図 1 に断熱壁で囲まれた重力多体系の指数  $n$  のポリトロープ状態を示す [11]。縦軸  $\lambda = -Er_e/GM^2$  は無次元化されたエネルギー，横軸  $D = \rho_c/\rho_e$  は中心と壁での密度比である。図 1 によれば， $n \leq 5$  ではグラフが単調増加であるが， $n > 5$  では  $\lambda$  に極大が現れている。また Tsallis エントロピーの2次変分の解析から  $n > 5$  では，極大の右側の状態，すなわち指数  $n$  で決まるそれぞれの極大値を与える臨界値より大きい密度比の場合，重力熱力学的に不安定であることが示されている。

## 2.2 ポリトロープ状態による重力多体系の非平衡進化の記述

ここまでの研究で Tsallis エントロピーの極値で与えられるポリトロープ状態の性質が次第に理解されてきた。しかし厳密には，この段階では，Tsallis エントロピーを用いた変分原理が無矛盾な理論的枠組みであることを示したにすぎない。そこで，ポリトロープ状態が重力多体系の時間進化の過程で実現されるか，すなわちその **reality** を見るために断熱壁に閉じこめた重力多体系のN体数値シミュレーションを行った [6]。数値シミュレーションの結果について述べる前にまず重力多体系の2つの時間スケールについて説明しなければならない [1, 2]。1つは **free fall time**

$$t_f \sim (G\rho)^{-1/2}$$

他方は **collision time**

$$t_c \sim \frac{N}{8 \ln N} t_f$$

である。ここで  $G$  は重力定数， $\rho$  は密度， $N$  は粒子数である。**free fall time** は個々の粒子（星）の系の全体の重力ポテンシャルの中での運動の時間スケール，**collision time** は2粒子間の重力散乱によるエネルギー輸送の時間スケールを表している。

図 2(a) に数値シミュレーションで得られた一粒子分布関数  $f(\epsilon)$  の時間発展の1例を示す。初期状態として， $n = 3, D = 10^4$  のポリトロープ状態を用意した。粒子数は  $N = 2048$ ，時間スケールは  $t_f \sim 1, t_c \sim 30$  である。また，各時間  $T$  での  $f(\epsilon)$  はそのまま画くと重なってしまうので出力ごとに 100 倍して上にずらしてプロットしている。2体緩和が進むにつれ初期の指数  $n = 3$  のポリトロープ状態からはずれていくが，各時間で他の指数でのポリトロープ状態でうまく fitting できている。

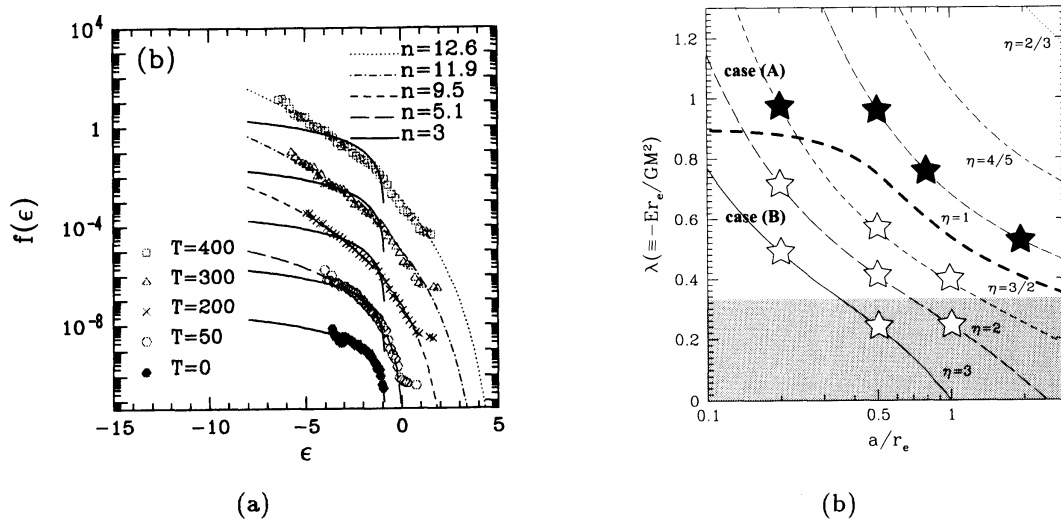


図 2

この結果はポリトロープ状態が重力多体系の2体緩和による非平衡進化を記述することを明瞭に示している。エネルギーを保ち、指数  $n$  を増加させながらポリトロープ状態を推移していく過程を図 1 上に矢印で示している (**n3A**)。また図 2(a) において時刻  $T = 400$  では若干ポリトロープ状態からずれ始めているが、これは重力熱力学的不安定性によるものである。

ここまで、重力多体系がエネルギー輸送を特徴づける  $t_c$  の時間スケールでポリトロープ状態 (3) を遷移していくことを示した。本研究では、引き続きポリトロープ状態と異なる初期状態からの進化を系統的に研究した [6, 12]。具体的な初期分布として密度分布が

$$\rho(r) \propto \frac{1}{r^{3-\eta}(r+a)^{1+\eta}}$$

で与えられる Tremaine 系列を考えた。これは、楕円銀河や銀河団など2体緩和がほとんど進んでいない重力多体系の密度分布のモデルで、 $\eta, a$  の2つのパラメータを含んでいる。 $a$  は中心部 (コア領域) の大きさを表し、 $\eta$  はコアでの密度分布のべきを決めている。

☆に対応する初期条件 (**case B**) では、系は速やかにポリトロープ状態に近づき、その後より大きな指数  $n$  のポリトロープ状態へと推移していく。一方★ (**case A**) はポリトロープ状態による fitting がうまくいかなかった初期状態である。しかし、(**case A**) はコアでの密度分布が急過ぎる等の理由で、ただちに重力熱力学的不安定性が始まる場合であった。従って、熱力学的に安定な状態であれば”系はあるポリトロープ状態に近づきその後ポリトロープの系列を推移して行く”という重力多体系の2体緩和による非平衡進化

の記述がきわめて有効であることがN体シミュレーションから示された。

## 2.3 ポリトロープ指数の時間発展方程式

ここまでの研究で、重力多体系の非平衡進化は指数  $n$  を1パラメータとするポリトロープ状態で近似的に表現されることがわかった。これは、重力多体系のエネルギー輸送による非平衡進化を記述するのに有効な分布関数の 1-parameter family が得られたことを意味する。その指数  $n$  の進化をミクロな理論からの導出について解説する。

重力多体系の熱的進化では粒子同士の2体衝突、なかでも小角度の2体衝突が最も重要な過程である。そこで Boltzmann 方程式の衝突項を運動量輸送の2次まで展開して得られる Fokker-Planck (F-P) 方程式が、宇宙物理学で球状星団の進化を議論する際に広く用いられている。本研究ではこの F-P 方程式をもちいてポリトロープ指数  $n$  の発展方程式を導出した。

もちろん、ポリトロープ状態は F-P 方程式の厳密な意味での解ではない。このような場合、指数  $n$  の時間変化についての情報を取り出すためには変分法が有効なことが多い。F-P 方程式はいわゆる拡散方程式の形をしており、残念ながら普通の変分原理からこの方程式を導くことはできない。幸いなことに Glansdorff と Prigogine により self-adjoint でない方程式を導く一般化された変分原理という手法が開発され、Inagaki, Lynden-Bell もしくは Takahashi により球状星団の進化への応用も既に行われていた。そこで、本研究では一般化された変分原理での F-P 方程式の母汎関数(局所ポテンシャル)に試行関数としてポリトロ

ープ状態を代入し指数  $n$  について変分することで  $n$  に対する発展方程式を導出した。

図3にN体シミュレーションとの比較を示す[13]。時間スケール  $t_{rh,i}$  は、系の半分の質量が含まれる半径 (half mass radius) での平均密度で評価した collision time  $t_c$  である。粒子数  $N = 2000 \sim 8000$  でのシミュレーションの結果と一般化された変分原理によ

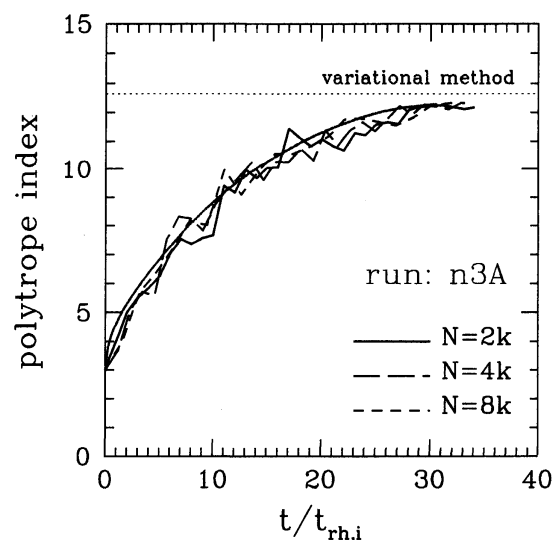


図 3

る  $n$  の時間発展は極めてよく一致している.

### 3 Hamiltonian Mean Field Model (HMF model)

これまで重力多体系の非平衡進化のポリトロープによる記述について解説してきた. ここでは長距離相互作用系のもう一つの代表例である **Hamiltonian Mean Field Model**(HMF model) [9, 10] の非平衡進化とポリトロープの関連について報告する.

このモデルは,  $N$  個のスピンがすべて同じ強さで強磁性的結合している XY モデルである,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_j^2 + \frac{1}{2N} \sum_{j,k=1}^N (1 - \mathbf{m}_j \cdot \mathbf{m}_k) . \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{m}_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$  が  $j$  サイトのスピンの  $x-y$  面内での向きを表している. オーダーパラメタは磁化  $\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{m}_j$  である. ここではこの系を, 単位円周上を運動する  $N$  個の粒子系と見なして議論を進めていく.

このモデルは平均場近似が厳密に成り立つので熱平衡状態の分布関数や統計量を簡単に求めることができる [14]. 重力熱力学的不安定性の解析 [4] と同様の手法, すなわち B-G エントロピーの極大状態として与えられる平衡状態は一粒子分布関数が Boltzmann 分布  $f(\epsilon)_{\text{BG}} \propto \exp(-\beta\epsilon)$  で記述され, 磁化などの物理量を計算することができる. 2.1 節で解説したようにこの解析を Tsallis エントロピーに拡張できることは容易に想像できるだろう. 詳しい計算は省略するが, HMF model においても  $M, E$  を一定に保って Tsallis エントロピーを極大にする状態 (一粒子分布関数) は

$$f(\theta, p) = A (\Phi_0 - \epsilon)^{q/(1-q)}, \quad \epsilon = \frac{1}{2} v^2 + \Phi(\theta) \quad (5)$$

で与えられるポリトロープになり, その指数は  $n = \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2}$  であることが示される. 一粒子エネルギー  $\epsilon$  に現れるポテンシャルは

$$\Phi(\theta) = 1 + M \cos(\theta - \gamma) \quad (6)$$

となり, それを決める磁化の強さ  $M$  は

$$M = - \frac{\int_0^{2\pi} \cos \theta (\Phi_0 - M \cos \theta)^n}{\int_0^{2\pi} (\Phi_0 - M \cos \theta)^n} \quad (7)$$

を自己無撞着に解くことで得られる. ここで,  $\Phi_0 = (n+1) T_{\text{phys}} - M^2$ ,  $T_{\text{phys}}$  は系の温度である. もちろんここまでは Boltzmann 分布からパラメター  $n$  をもつ分布に拡張



ただで、その物理的意味は明らかではない。しかし、2.2 節で紹介しように、重力多体系では系の非平衡進化がポリトロプの系列に沿って進んだことを思い出すと、HMF model でも同様のことが起こっていると期待される。

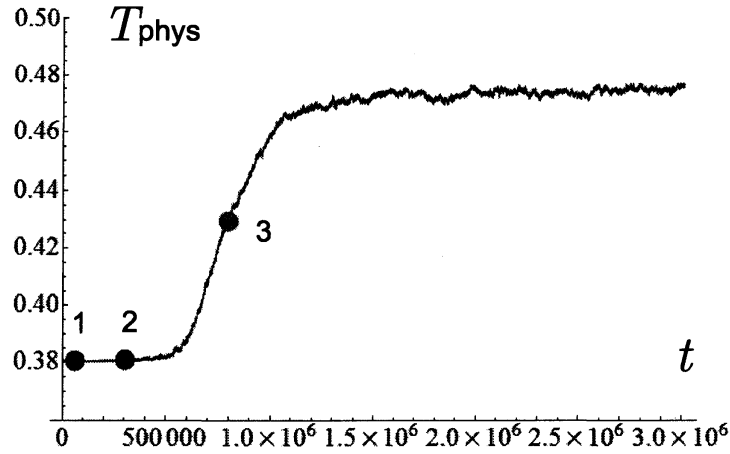


図 4

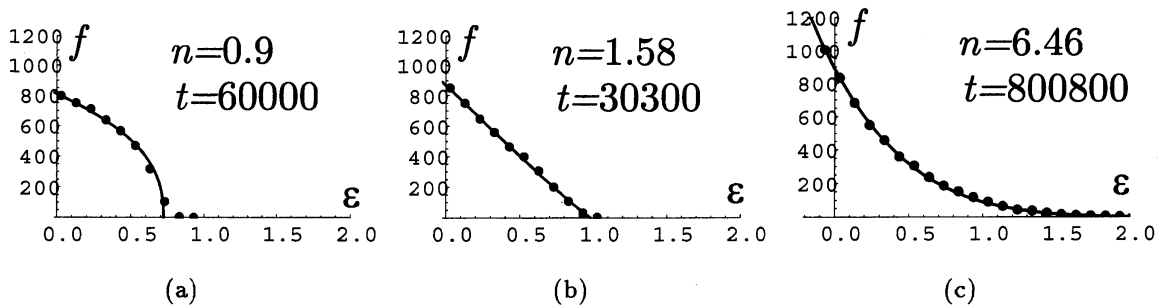


図 5

図 4 は 粒子数  $N = 10^4$  , 粒子あたりのエネルギー  $U = E/N = 0.69$  の場合の数値シミュレーションでの温度の時間発展である。初期条件は位相空間での分布が一様な、いわゆる **water-bag** 条件である。また各粒子が系を一周する時間スケールは  $t_{\text{dyn}} \sim 10$  程度であった。系は空間的に一様で  $M \sim 0$  の状態から出発し  $t \sim 6 \times 10^5$  あたりまでほぼ空間的に一様な**準定常状態**に留まっている。その後空間構造が成長し磁化の大きさ  $M$  が増加し、それに伴い温度が上昇する**遷移状態**が出現する。そして  $t \sim 1.5 \times 10^6$  あたりで熱平衡状態の温度に近い値をとるようになる。

図 4 の丸 1,2,3 でのシミュレーションによる一粒子分布関数  $f(\epsilon)$  を図 5 の●で示す (上

から丸 1,2,3 の状態). 各図の実線は図中に示されたポリトロープ指数  $n$  での解析的に求めた分布関数である. 分布関数の時間発展がみごとにポリトロープの系列上の進化として表現されている.

## 参考文献

- [1] J.Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1987)
- [2] D.Heggie and P.Hut, *The Gravitational Million-Body Problems*, (Cambridge University Press, 2003)
- [3] V.A.Antonov, Most probable phase distribution in spherical star systems and condition for its existence, *Vest. Leningrad Gros. Univ.*, **7** 135 (1962) (English transl. in *IAU Symposium 113, Dynamics of Globular Clusters*, ed. J. Goodman and P. Hut [Dordrecht: Reidel], pp. 525–540 [1985])
- [4] D.Lynden-Bell and R. Wood, The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems, *Mon.Not.R.Astr.Soc.* **138** (1968) 495–525
- [5] T. Padmanabhan, Statistical mechanics of gravitating systems, *Phys.Rep.* **188** (1990) 285–362 )
- [6] A.Taruya and M.Sakagami, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 181101
- [7] M.Sakagami and A.Taruya, *Continuum Mech. Thromdyn.*, **16** (2004) 279–292
- [8] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*, Springer (2009)
- [9] M.Antoni and S.Ruffo, *Phys. Rev. E*, **52** (1995) 2361
- [10] A.Campa, T.Dauxois and S.Ruffo, *Physics Reports* **480** (2009) 57-159
- [11] A.Taruya and M. Sakagami, *Physica A* **307** (2002) 185–206; *Physica A* **318** (2003) 387–413; *Physica A* **322** (2003) 285–312
- [12] A.Taruya and M.Sakagami, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **364** (2005) 990-1010
- [13] A.Taruya and M.Sakagami, *J. of Physics: Conference series* **31** (2006) 55-58
- [14] S.Inagaki, *Prog.Theor.Phys.*, **90** (1993) 577–584